

随机动态系统的数值仿真

李 黎¹⁾ 刘洪伟²⁾

(广东工业大学 1) 计算中心, 2) 系统工程研究所, 广州, 510090)

摘要 利用随机迭代算法, 研究了线性时不变随机动态系统的数值仿真, 给出一种易于计算的、收敛速度快且稳定的迭代算法, 并且推导出算法的收敛阶次。

关键词 随机系统; 数值仿真; 随机迭代算法

中图分类号 TP15

在许多工程系统中都存在着随机变化的有用信号与干扰, 例如雷达跟踪系统和惯性导航系统. 随着技术的发展, 人们不仅从元器件方面, 而且从系统设计方面来提高工程系统的质量, 提高系统的运行精度. 为此, 必须采用随机分析方法来分析工程系统. 这不仅在精密仪器和自动控制技术等领域, 而且在生物工程以及社会经济系统中, 研究随机的动态系统都是十分必要.

在系统的研究中, 将其数学模型放在计算机上进行试验. 利用计算机对系统的数学模型进行数值仿真, 是系统设计与分析一种重要手段.

对确定型系统的数值仿真, 目前所取得的成果比较多^[1,2]. 而对于随机动态系统的数值仿真来说就复杂的多, 其原因为: 对于由常微分方程或差分方程来刻画确定型动态系统来说, 其精确解是一个函数, 任一时间点上有一个具体的值与之对应. 而对于随机系统来说, 其精确解是一个随机过程, 在任一时间点上的解是一个随机变量, 若要精确描述一个随机变量, 就要知道其分布函数或特征函数, 因此在整个时间轴上, 其精确解是由一簇函数组成, 因此若试图对整个函数簇进行数值仿真, 其计算量相当庞大, 这是不现实的. 在工程设计中, 往往并不必了解系统状态变量的全部信息(即其分布函数), 而只需要知道状态变量的部分数字特征, 因此研究随机系统的数值仿真与确定型系统的数值仿真有着较大区别.

基于随机动态系统数值仿真的特点, 它在仿真的原则与方法上与一般动态系统也是不同的, 确定型系统的数值仿真是以数值解与精确解的误差为准则. 而对于随机系统来说, 在不同概率意义下, 建立误差判别标准就不一样, 从而不同的随机迭代方法在不同的误差准则下, 其收敛性与稳定性等会有较大的差别.

在本文, 主要研究 Ito 型线性时不变随机动态系统的数值仿真方法. 在文献[3, 4]中, 给出了这类系统的几种迭代法, 但收敛阶次均为 1 次, 而且在[3]中的公式中, 对 A 的要求较高, 影响了它实际应用的有效性. 本文推得一种新的随机迭代公式, 放松了对系统的约束条件, 而且收敛阶次为 2 阶.

1 系统描述与问题提出

我们考虑如下形式的线性时不变 Ito 型随机系统

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bdw(t). \quad (1)$$

其中 $t \in R$ 具有随机初始值 x_0 . 这里扩散过程 $\{x(t) | t \in R\}$ 是一个 p 维的向量, 漂移系数矩阵 A 是一个 $p \times p$ 矩阵, 扩散矩阵 B 是一个 $p \times q$ 矩阵及 $\{\omega(t) | t \in [0, T]\}$ 是具有独立向量的 q 维标准 Wiener 过程. 在本文中, 我们假设 x_0 与 $\{\omega(s) | s < t\}$ 相互独立.

在本文, 我们讨论在任一时间 T 上的数值仿真, 为此对区间 $[0, T]$ 进行分区, 分区的点为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$, 其中 $t_k = kh, k = 0, 1, \dots, K, K$ 是任意正整数. 进一步地, 设 $e_1, e_2, \dots, e_k$ 以及 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ 是相互独立的随机向量, 而且 $e_k \approx N(0, I), \varepsilon_k \approx N(0, B\varepsilon)$, 其中

$$B\varepsilon = \int_0^h \exp(A(h-s))BB^T \exp(A^T(h-s))ds. \quad (2)$$

SDE(1) 的精确解是(参见[3])

$$x(t) = \exp(At)x_0 + \exp(At) \int_0^t \exp(-As)Bdw(s). \quad (3)$$

一般情况下, 是利用对式(3)中 Ito 随机积分进行数值仿真的方法来对方程的解 $x(t)$ 进行仿真. 由式(2)可得另一种对 $x(t)$ 进行仿真的计算方法, 设 $x_k = x(t_k), k = 1, 2, \dots, K$, 那么有

$$x_k = \exp(Ah)x_{k-1} + \varepsilon_k = \exp(Ah)x_0 + \sum_{i=1}^k \exp(A(k-i)h)\varepsilon_i, \quad (4)$$

而这种情况, 需要先由式(2)对 $B\varepsilon$ 进行计算. 第三种数值仿真法是迭代法, 即利用一定的随机迭代公式对 SDE(1) 进行数值仿真. 这是本文主要研究的方法. 下面先介绍一个随机迭代法中收敛的定义以及常用的随机迭代方法.

设 $\{x_k | k = 0, 1, \dots\}$ 为任意的随机逼近过程, 若

$$E \|x(kh) - x_k\|^2 \leq Ch^\delta, \quad (5)$$

其中 $h \in (0, 1], \|x\|^2 = \text{tr}(xx^T)$. 那么称 $\{x_k | k = 0, 1, \dots\}$ 在均方意义下以阶次 δ 收敛.

引入记号

$$w_k = w(t_k), \Delta w_k = w_k - w_{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

Torok^[3] 等人给出 Euler 型的随机迭代法如下

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= x_0 \\ \xi_{k+1} &= \xi_k + A\xi_k h + B\Delta w_k \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

$$\xi_k = (Ah + I)^k \xi_0 + \sum_{i=1}^k (Ah + I)^{k-i} B\Delta w_i. \quad (7)$$

这就是随机迭代法著名的 Robing- Monro(RM) 算法^[4],

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= x_0 \\ \eta_{k+1} &= \eta_k + \frac{1}{2}(A(\eta_k + \eta_{k+1})h) + B\Delta w_k \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \eta_k &= \left(\frac{I-Ah}{2}\right)^{-1} \left(\frac{I+Ah}{2}\right)^k \eta_0 \\ &+ \left(\frac{I-Ah}{2}\right)^{-1} \sum_{i=1}^k \left(\frac{I-Ah}{2}\right)^{-1} \left(\frac{I+Ah}{2}\right)^{k-i} B\Delta w_i \end{aligned} \quad (9)$$

定理 1. 设 $E \|x_0\|^2 = \text{tr}(B_0) \leq \infty$, 对于由随机迭代方程得到的(6)(8)式, 均有

$$E \|x(T) - \xi_k\|^2 = O(h^2), \quad E \|x(T) - \eta_k\|^2 = O(h^2).$$

证明: 参见文献[3].

由定理 1 可知, 由一般 Robing- Monro 型随机迭代法所得的 SDE (1) 的随机逼近算法均以阶次 2 逼近方程的精确解. 但由式 (9) 可知, 上述的迭代要求 $(I - Ah)$ 可逆, 而 SDE 的均值方程为

$$dE(t) = AE(t)dt$$

的稳定性条件是

$$\lambda_M(A) < 0.$$

因此, 若存在特征值等于或接近 h 时, $(I - Ah)$ 为奇异或接近奇异的. 公式 (8) 会退化为奇异系统, 这时会影响迭代公式的收敛性.

2 主要结果

下面对上述随机迭代法加以改进, 得到一个新的迭代公式, 即可以克服出现退化的情形, 也可得到新的收敛速度更快的随机迭代方法. 现构造迭代公式如下

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= x_0 \\ \bar{\zeta}_k &= \zeta_k + hA\zeta_k \\ \zeta_{k+1} &= \zeta_k + \frac{h}{2}A(\zeta_k + \bar{\zeta}_k) + B\Delta w_k \end{aligned} \right\}, \quad \text{其中} \quad (10)$$

$$\zeta_k = (I + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2)^k \zeta_0 + \sum_{i=1}^k (I + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2)^{k-i} B\Delta w_i. \quad (11)$$

定理 2 设 $E \|x_0\|^2 = \text{tr}(B_0) \leq \infty$, 对于由随机迭代方程得到的 (10) (11) 式, 均有

$$E \|x(T) - \zeta_k\|^2 = O(h^3).$$

证明 由于

$$\int_0^h \exp(-As) BB^T \exp(-A^T s) ds = h \exp(-Ah) BB^T \exp(-A^T h) + O(h^2)$$

以及 $B\Delta w_k = \sqrt{h}Be_k$, 那么由式 (10) (11) 可得

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(At) [x_0 + \sum_{i=1}^k \exp(-Aih) (\sqrt{h}B + IO(h^{3/2})e_k)] \\ \zeta_k &= (I + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2)^k [\zeta_0 + \sum_{i=1}^k (I + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2)^{-1} B\sqrt{h}e_k]. \end{aligned}$$

另外, 有

$$\exp(Akh) - (I + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2)^k = IO(h^3).$$

同理

$$\max_{0 \leq i \leq k} \{ \exp(Ahi) - (I + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2)^i \} = IO(h^3).$$

由 $e_1, e_2, \dots, e_k$ 与 x_0 的独立性, 可得

$$E \|x(t) - \zeta_k\|^2 \leq \|\exp(At) - (I + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2)^k\|^2 E \|\zeta_0\|^2 + \sum_{i=1}^k \|\exp(Ah(k-i))$$

$$(\sqrt{h}B + IO(h^{3/2})) - (I + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2)^i \sqrt{h}B\|^2$$

$$\begin{aligned} &\leq O(h^3) + Kh \max_{0 \leq i \leq k} \|\exp(Ahi)(B + IO(h)) \\ &\quad - (I + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2)B\|^2 \leq O(h^3). \end{aligned}$$

证毕.

3 例子分析

下面给出一个随机动态系统仿真例子, 比较分析不同随机迭代法与利用 Monte- Carlo 法计算随机积分式(2)所得的结果. 设随机系统为

$dx(t) = Ax(t)dt + Bdw(t),$
其中 $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T, w(t) \approx N(0, 1),$ 而且

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \zeta_k$

当取 $h = 0.01$ 时, 若按文献[3]的算法进行仿真所得解的精度为

$E \|x(T) - \xi_k\|^2 = 3.4495 \times 10^{-5}.$

用本文提出方法所得的仿真结果精度为

$E \|x(T) - \zeta_k\|^2 = 1.2997 \times 10^{-8}.$

图 1 画出 ζ_k 迭代的样本值与均值方程的曲线图.

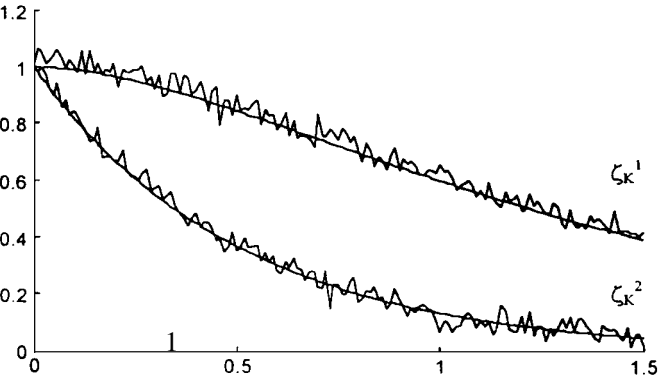


图 1 仿真样本值 $\zeta_k = (\zeta_k^1, \zeta_k^2)$ 曲线图

4 结束语

在随机系统的研究中, 如何建立有效的随机迭代算法是在系统辨识、随机控制等领域中引人注目的课题. 最近亦有不少论文讨论随机迭代算法中并行与分布式计算的问题(参考[5]及其中的参考文献). 因此研究何种形式的迭代算法便于作分布处理与并行计算, 是随机系统研究领域一个富有挑战性的研究课题.

参 考 文 献

1 熊光楞, 沈被娜, 宋安澜. 连续系统仿真与离散事件系统仿真. 北京: 清华大学出版社, 1991. 164~ 199
2 顾启泰. 系统设计与仿真. 北京: 清华大学出版社, 1995. 198~ 200
3 Torok. C. Numerical Solution of Linear Stochastic Differential Equations, Computers & Mathematics with Application. 1994, 27(4) : 1~ 10
4 狄昂照. 随机逼近. 北京: 科学出版社, 1994. 38~ 48
5 Ladd G S, Siljak D D. Convergence and Stability of Distributed Stochastic Iterative Processes. IEEE Trans. Automatic Control, 1990, 35(6) : 665~ 672

Numerical Simulation of Stochastic Dynamic Systems

Li Li¹⁾ Liu Hongwei²⁾

(1) Computer Center, 2) System Engineering Institute, GDUT, Guangzhou, 510090)

Abstract The numerical simulation of linear time- invariant stochastic dynamic systems is studied via stochastic iterative algorithm. An easy computing, high convergence speed and stability iterative algorithm is obtained and conducted its convergence rate.

Key words stochastic systems; numerical simulation; stochastic iterative

专著简介

《电器与可编程控制器应用技术》简介

由我校电气工程及自动化系邓则名副教授和邝穗芳讲师编著、王鸿贵教授和沈起奋副教授主审、冯焱生教授推荐的《电器与可编程序控制器应用技术》高等学校教材,已由机械工业出版社于一九九七年三月出版,全国发行。

本书是根据高校电气自动化企业《工厂电气控制设备(技术)》课程的教学大纲,并充分考虑到电气控制技术的实际应用和发展趋势以及课程的优化而编写的。本书有以下主要特点:

一是精选内容优化课程。根据学科性和先进性精选电器控制内容,压缩电机扩大机控制系统内容,删掉磁放大器和顺序控制器内容,大幅度增加发展快应用广的可编程序控制器(简称 PLC)内容。把分散在几门课程中的 PLC 内容在本书中作较全面系统的阐述,这不仅节省了学时,而且优化了课程结构、内容和教学。

二是联系实际突出应用。按照实用性和典型性着重介绍常用的低压电器,电器控制基本线路,典型生产机械电气控制线路,PLC 的基础知识和应用实例。理论联系实际,突出应用,通俗易懂,可读性强。

三是把电器控制和 PLC 控制对应起来编写,使两者较好地结合起来。

全书共两篇。第一篇共四章,主要介绍常用低压电器的基本结构、工作原理和选用原则,电器控制基本环节与线路设计的一般原则和方法,典型生产机械的电气控制线路,简介电机扩大机控制系统。第二篇共九章,主要讲述 PLC 的基本结构、工作过程、F 和 F₁ 系列 PLC 的指令系统、编程方法和技巧、编程举例,PLC 控制系统的设计与维护,应用实例, F₁- 20P 编程器的结构功能和使用方法。此外,每篇都附有适量习题,并在附录中简介 FX₂ 系列 PLC 和几种常见的国外 PLC 的性能指标。

本书可作为高校、大专、电工、业余大学自动化技术、电气技术、电机电器及控制以及相近专业的《工厂电气控制设备(技术)》及类似课程的选用教材,也可供电气工程、电子技术人员参考。

本书出版半年来已得到社会的认可,第一次印刷的已发行完,出版社已决定将于明年重版发行。

(编辑部)